УДК 330.322.16:629.78

01.00.00 Физико-математические науки

ОПТИМАЛЬНЫЙ ПЛАН УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ НЕЛЬЗЯ НАЙТИ НА ОСНОВЕ ФОРМУЛЫ КВАДРАТНОГО КОРНЯ

Орлов Александр Иванович
д.э.н., д.т.н., к.ф.-м.н., профессор
РИНЦ SPIN-код: 4342-4994
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5, prof-orlov@mail.ru

Управление запасами (другими словами, материально-техническое снабжение) – неотъемлемая часть работы фирм и организаций. Речь идет о запасах сырья, топлива, материалов, инструментов, комплектующих изделий, полуфабрикатов, готовой продукции на промышленном (или сельскохозяйственном) предприятии, о запасах товаров на оптовых базах, складах магазинов, на рабочих местах продавцов, наконец, у потребителей. Запасы постоянно расходуются и пополняются по тем или иным правилам, принятым на предприятии. Оптимизация этих правил, т.е. оптимальное управление запасами, дает большой экономический эффект. Математическая теория управления запасами, основанная на моделях движения товарных потоков, является крупной областью экономико-математических исследований. Предложенная еще в 1915 г. Ф. Харрисом классическая модель теории управления запасами является одним из наиболее простых и наглядных примеров применения математического аппарата для принятия решений в экономической области. Эту модель обычно называют моделью Вильсона (или Уилсона), так как она получила известность после публикации работы Р.Г. Вильсона в 1934 г. Формула оптимального размера заказа (т.н. "формула квадратного корня"), полученная в модели Вильсона, широко применяется на различных этапах производства и распределения продукции, поскольку оказывается практически полезной для принятия решений при управлении запасами, в частности, приносящей заметный экономический эффект. Однако, вопреки распространенному заблуждению, эта формула не дает возможности рассчитать оптимальный размер заказа (хотя и является необходимым этапом на пути его нахождения). Это выясняется при строгом экономико-математическом анализе модели Вильсона, проведенном в статье. Дан алгоритм расчета оптимального размера партии. Установлено, что формула квадратного корня дает асимптотически оптимальный план. Изучена устойчивость выводов в экономико-математической модели. Рассмотрен пример практического применения классической модели управления

UDC 330.322.16:629.78

Physics and mathematical sciences

OPTIMAL PLAN OF INVENTORY CONTROL CANNOT BE FOUND BASED ON THE FORMULA OF THE SQUARE ROOT

Orlov Alexander Ivanovich
Dr.Sci.Econ., Dr.Sci.Tech., Cand.Phys-Math.Sci., professor
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Inventory management (in other words, logistics) is an integral part of the work of firms, companies and organizations. We are talking about stocks of raw materials, fuel, tools, components, semi-finished products, finished products for industrial (or agricultural) firms, about stocks of goods to distribution centers, warehouses, shops, workplaces sellers, finally consumers. Stocks spent all the time and supplemented on various rules adopted in the firm. Optimization of these rules, ie, optimal inventory management, gives a big economic effect. The mathematical theory of inventory management, based on the models of movement of flows of goods, is an important area of economic-mathematical research. The classical model of inventory management proposed in 1915 by F. Harris is one of the simplest and most illustrative examples of application of the mathematical apparatus for decision-making in the economic field. This model is commonly referred to as the Wilson model, because this model became known after the publication of R.G. Wilson in 1934. The formula of the optimum batch size (the so-called "the formula of the square root"), obtained in the Wilson model, is widely used on various stages of production and distribution, since this formula is practically useful for decision-making in the inventory management, in particular, for generating significant economic effect. However, contrary to popular belief, by means of this formula it is impossible to calculate the optimal batch size (although it is a necessary step on the path of its finding). In strict economic-mathematical analysis of Wilson model, conducted in the article, it is shown that the formula of square root does not give the optimal batch size. We have given the algorithm for calculating the optimal batch size. It has been found that the formula of the square root gives asymptotically optimal plan. We have studied the stability of the conclusions in the economic-mathematical model and considered an example of the practical application of the classical model of inventory management

запасами

Ключевые слова: МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЛОГИСТИКА, УПРАВЛЕНИЕ ЗАПАСАМИ, ФОРМУЛА КВАДРАТНОГО КОРНЯ, ОПТИМАЛЬНЫЙ РАЗМЕР ПАРТИИ, РАЗОБЛАЧЕНИЕ МИФА, АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫЙ ПЛАН, УСТОЙЧИВОСТЬ ВЫВОДОВ, ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Keywords: MATHEMATICAL MODELING, LOGISTICS, INVENTORY CONTROL, SQUARE ROOT FORMULA, OPTIMAL BATCH SIZE, DISRUPTION OF MYTH, ASYMPTOTICALLY OPTIMAL PLANS, STABILITY OF CONCLUSIONS, PRACTICAL APPLICATION OF ECONOMIC-MATHEMATICAL MODELS

1. Введение

Экономико-математической теории управления запасами в 2015 г. исполняется 100 лет (отсчитывая с работы Ф. Харриса [1]). Она входит в логистику - одну из экономических наук.

Термин «логистика» происходит от французского слова «*loger*» (размещение, расквартирование), которое употребляется в военной терминологии для определения движения военных грузов, их складирования и размещения, а также для описания процесса размещения и расквартирования военных подразделений. В настоящее время термин «логистика» широко используется в деловом мире и определяет теорию и практику движения сырья, материалов, комплектующих изделий, производственных, трудовых и финансовых ресурсов, готовой продукции от их источников к потребителям.

Логистика – наука о планировании, управлении и контроле за движением материальных, информационных и финансовых ресурсов в различных производственно-экономических системах. Предметом логистики является комплексное управление всеми материальными и нематериальными потоками в таких системах. Новизна концепции логистики в области управления промышленными системами состоит во всестороннем подходе к вопросам движения материальных благ в процессе производства и управления. Логистическая система должна охватывать и согласовывать процессы производства, закупок и распределения продукции, а также быть основой при стратегическом планировании и прогнозировании. Итак, логистика – это экономическая дисциплина, занимающаяся оптимальной организацией материальных, финансовых и информационных потоков [2 - 5]. Важное место занимает логистика в менеджменте высоких технологий, посвященном вопросам организации, экономики, управления, проектирования, эффективности, устойчивости интегрированных производственно-корпоративных структур [6, 7].

Одна из основных частей логистики – теория управления запасами. Сколько товара держать на складе? Много – будут омертвляться оборотные средства, вложенные в запас. Мало – слишком часто надо будет заниматься получением новых партий товара и нести соответствующие расходы. Значит, надо рассчитать и использовать оптимальный размер запаса. А для этого необходимо построить соответствующую математическую модель.

Управление запасами (другими словами, материально-техническое снабжение) – неотъемлемая часть работы фирм и организаций. Речь идет о запасах сырья, топлива, материалов, инструментов, комплектующих изделий, полуфабрикатов, готовой продукции на промышленном (или сельскохозяйственном) предприятии, о запасах товаров на оптовых базах, складах магазинов, на рабочих местах продавцов, наконец, у потребителей. Запасы постоянно расходуются и пополняются по тем или иным правилам, принятым на предприятии. Оптимизация этих правил, т.е. оптимальное управление запасами, дает большой экономический эффект.

Математическая теория управления запасами, основанная на моделях движения товарных потоков, является крупной областью экономико-математических исследований. Предложенная еще в 1915 г. Ф. Харрисом [1] классическая модель теории управления запасами является одним из наиболее простых и наглядных примеров применения математического аппарата для принятия решений в экономической области. Эту модель обычно называют моделью Вильсона (или Уилсона), так как она получила известность после публикации работы Р.Г. Вильсона в 1934 г. [8]. Продолжают быть актуальными классические монографии Дж. Букана и Э. Кенинсберга [9], Дж. Хедли и Т. Уайтина [10], Ф. Хэнсменна [11], работы Е.В. Булинской [12] и Ю.И. Рыжикова [13]. Исследования в области математической теории управления запасами активно ведутся и в настоящее время [14 - 18].

Формула оптимального размера заказа (т.н. "формула квадратного корня"), полученная в модели Вильсона, широко применяется на различных этапах производства и распределения продукции, поскольку оказывается практически полезной для принятия решений при управлении запасами, в частности, приносящей заметный экономический эффект [19 - 20]. Однако, вопреки распространенному заблуждению, эта формула не дает возможности рассчитать оптимальный размер заказа (хотя и является необходимым этапом на пути его нахождения. Это выясняется при строгом экономико-математическом анализе модели Вильсона. Рассмотрим эту модель подробнее.

2. Классическая модель управления запасами

Пусть $y(t)$ – величина запаса некоторого товара на складе в момент времени t, $t \geq 0$. Дефицит не допускается, т.е. $y(t) \geq 0$ при всех t. Товар пользуется равномерным спросом с интенсивностью μ, т.е. за интервал времени Δt со склада извлекается и поступает потребителям часть запаса величиной $\mu\Delta t$. В моменты времени $t_0 = 0$, t_1, t_2,… пополняется запас на складе – приходят поставки величиной Q_0, Q_1, Q_2,… соответственно. Таким образом, изменение во времени величины запаса $y(t)$ товара на складе изображается ломаной зубчатой линией (рис.1), состоящей из наклонных и вертикальных звеньев, причем наклонные отрезки параллельны.

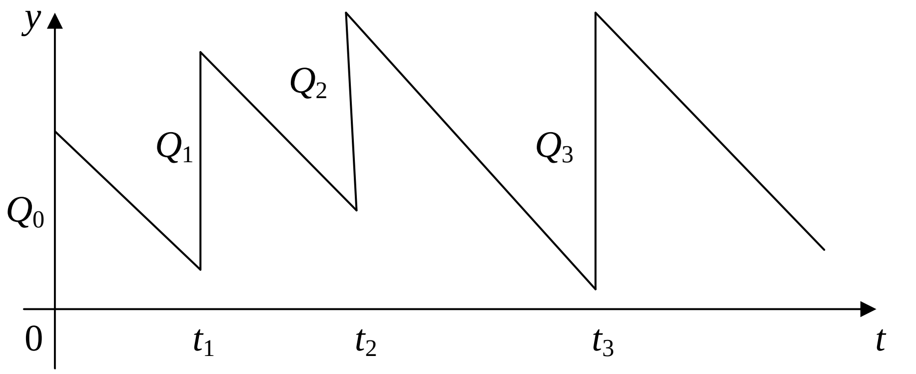

Рис.1. График изменения величины запаса на складе

Таким образом, в момент t_i величина запаса на складе $y(t)$ скачком увеличивается на Q_i. Следовательно, функция $y(t)$ имеет разрывы в точках t_1, t_2,… Для определенности будем считать, что эта функция непрерывна справа.

Пусть s – плата за хранение единицы товара в течение единицы времени. Поскольку можно считать, что величина запаса $y(t)$ не меняется в течение интервала времени $(t;\ t+dt)$, где dt – дифференциал, т.е. бесконечно малая, то плата за хранение всего запаса в течение этого интервала времени равна $sy(t)dt$. Следовательно, затраты за хранение в течение интервала времени $[0;T)$, где T – интервал планирования, пропорциональны (с коэффициентом пропорциональности s) площади под графиком уровня запаса на складе $y(t)$ и равны

$$s\int_0^T y(t)dt.$$

Пусть g – плата за доставку одной партии товара. Примем для простоты, что она не зависит от размера поставки. Позже покажем, что если эта плата равна $g+g_1Q$, где Q – размер поставки, то оптимальный план поставки – тот же, что и при отсутствии линейного члена. Будет проанализирована и более сложная модель, в которой предусмотрена скидка с ростом поставки, приводящая к выражению $g+g_1Q+g_2Q^2$ для платы за доставку одной партии товара размером Q.

Пусть $n(T)$ – количество поставок, пришедших в интервале $[0;T)$. При этом включаем поставку в момент $t = 0$ и не включаем поставку в момент $t = T$ (если такая поставка происходит). Тогда суммарные издержки на доставку товара равны $gn(T)$. Следовательно, общие издержки (затраты, расходы) за время T равны

$$F(T;y) = F(y(t),\ 0 \le t < T) = gn(T) + s\int_0^T y(t)dt.$$

Запись $F(T;y) = F(y(t),\ 0\le t<T)$ означает, что общие издержки зависят от значений функции $y=y(t)$ при всех $0\le t<T$. Символ y обозначает функцию как целое. Другими словами, область определения $F(T;y)$ при фиксированном горизонте планирования T – не множество чисел, а множество функций.

Общие издержки, очевидно, возрастают при росте горизонта планирования T. Поэтому часто используют средние издержки, приходящиеся на единицу времени. Средние издержки за время T равны

$$f(T;y) = f(y(t),\ 0 \le t < T) = \frac{1}{T}F(T;y) = \frac{1}{T}\left\{gn(T) + s\int_0^T y(t)dt\right\}.$$

Поскольку товар отпускается со склада с постоянной интенсивностью (скоростью), дефицит не допускается, то доходы от работы склада пропорциональны горизонту планирования, средние доходы постоянны. Следовательно, максимизация прибыли эквивалентна минимизации издержек или средних издержек.

Если задать моменты прихода поставок и величины партий, то будет полностью определена функция $y=y(t)$ при всех $0\le t<T$. Верно и обратное утверждение – фиксация функции $y=y(t)$, $0\le t<T$, рассматриваемого вида (рис.1) полностью определяет моменты прихода поставок и величины партий. И то, и другое будем называть *планом* поставок или планом работы системы управления запасами. Для ее оптимизации необходимо выбрать моменты времени $t_0 = 0$, t_1, t_2,… пополнения запаса на складе и

размеры поставляемых партий товара Q_0, Q_1, Q_2,… так, чтобы минимизировать средние издержки $f_T(y)$ при фиксированном T.

Модель производственной ситуации (т.е. работы склада) описывается четырьмя параметрами - μ (интенсивность спроса), s (стоимость хранения единицы продукции в течение единицы времени), g (стоимость доставки партии товара), T (горизонт планирования).

Поставленная задача оптимизации работы склада интересна тем, что неизвестно число $2n(T)$-1 параметров, определяющих план поставок. Поэтому ее решение не может быть проведено с помощью стандартных методов теории оптимизации.

Решим эту задачу в три этапа. На первом установим, что оптимальный план следует искать среди тех планов, у которых все зубцы доходят до оси абсцисс, т.е. запас равен 0 в момент доставки очередной партии. Цель второго этапа – доказать, что все зубцы должны быть одной и той же высоты. Наконец, на третьем находим оптимальный размер поставки.

3. Оптимальный план

Найдем наилучший план поставок. План, для которого в моменты доставок очередных партий запас равен 0 (т.е. $y(t) = 0$), назовем *напряженным*.

Утверждение 1. Для любого плана поставок, не являющегося напряженным, можно указать напряженный план, для которого средние издержки меньше.

Покажем, как можно от произвольного плана перейти к напряженному плану, уменьшив при этом издержки. Пусть с течением времени при приближении к моменту t_1 прихода поставки Q_1 уровень запаса не стремится к 0, а лишь уменьшается до положительного значения $y(t_1$-) (где знак «минус» означает предел слева функции $y(t)$ в точке t_1).

Тогда рассмотрим новый план поставок с теми же моментами поставок и их величинами, за исключением величин поставок в моменты $t = 0$ и $t = t_1$. А именно, заменим Q_0 на $Q_{01} = Q_0 - y(t_1\text{-})$, а Q_1 на $Q_{11} = Q_0 + y(t_1\text{-})$. Тогда график уровня запаса на складе параллельно сдвинется вниз на интервале $(0;\ t_1)$, достигнув 0 в t_1, и не изменится правее точки t_1. Следовательно, издержки по доставке партий не изменятся, а издержки по хранению уменьшатся на величину, пропорциональную (с коэффициентом пропорциональности s) площади параллелограмма, образованного прежним и новым положениями графика уровня запаса на интервале $(0;\ t_1)$ (см. рис.2).

Итак, в результате первого шага перехода получен план, в котором крайний слева зубец достигает оси абсцисс. Следующий шаг проводится аналогично, только момент времени $t = 0$ заменяется на $t = t_1$. Если есть такая возможность, второе наклонное звено графика уровня запаса на складе параллельно сдвигается вниз, достигая в крайней правой точке t_2 оси абсцисс.

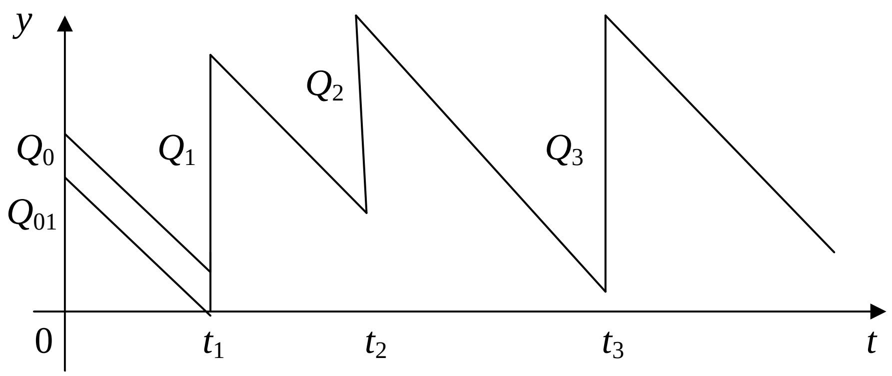

Рис. 2. Первый шаг перехода к напряженному плану

Аналогично поступаем со всеми остальными зубцами, двигаясь слева направо. В результате получаем напряженный план. На каждом шагу издержки по хранению либо сокращались, либо оставались прежними (если соответствующее звено графика не опускалось вниз). Следовательно, для полученного в результате описанного преобразования напряженного плана издержки по хранению меньше, чем для исходного плана, либо равны (если исходный план уже являлся напряженным).

Из утверждения 1 следует, что оптимальный план следует искать только среди напряженных планов. Другими словами, план, не являющийся напряженным, не может быть оптимальным.

Утверждение 2. Среди напряженных планов с фиксированным числом поставок минимальные издержки имеет тот, в котором все интервалы между поставками равны.

При фиксированном числе поставок затраты на доставку партий не меняются. Следовательно, достаточно минимизировать затраты на хранение.

Для напряженных планов размеры поставок однозначно определяются с помощью интервалов между поставками:

$$Q_{i-1} = \mu(t_i - t_{i-1}),\ \ i = 1,2,...,n(T)-1,\ \ Q_{n(T)-1} = \mu(T - t_{n(T)-1}).$$

Действительно, очередная поставка величиной $Q_{i\text{-}1}$ совпадает с размером запаса на складе в момент $t_{i\text{-}1}$, расходуется с интенсивностью μ единиц товара в одну единицу времени и полностью исчерпывается к моменту t_i прихода следующей поставки.

Для напряженного плана издержки по хранению равны

$$s\int_0^T y(t)dt = s\sum_{i=1}^{n(T)}\frac{Q_{i-1}(t_i - t_{i-1})}{2} = s\sum_{i=1}^{n(T)}\frac{\mu(t_i - t_{i-1})^2}{2} = s\sum_{i=1}^{n(T)}\frac{\mu\Delta_i^2}{2} = \frac{\mu s}{2}\sum_{i=1}^{n(T)}\Delta_i^2,$$

где $\Delta_i = t_i - t_{i\text{-}1}$, i = 1, 2, ..., $n(T)$, $t_{n(T)} = T$. Ясно, что Δ_i, i = 1, 2, ..., $n(T)$, - произвольные неотрицательные числа, в сумме составляющие T. Следовательно, для минимизации издержек среди напряженных планов с фиксированным числом поставок достаточно решить задачу оптимизации

$$\begin{cases} \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + ... + \Delta_n^2 \to \min, \\ \Delta_1 + \Delta_2 + ... + \Delta_n = T, \\ \Delta_i \ge 0,\ \ i = 1,2,...,n, \end{cases}$$

где $n = n(T)$.

Полученная задача оптимизации формально никак не связана с логистикой, она является чисто математической. Для ее решения целесообразно ввести новые переменные $\alpha_i = \Delta_i - T/n$, $i = 1, 2, ..., n$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = \sum_{i=1}^{n}(\Delta_i - \frac{T}{n}) = \left(\sum_{i=1}^{n}\Delta_i\right) - n\frac{T}{n} = T - T = 0.$$

Поскольку $\Delta_i = T/n + \alpha_i$, то

$$\Delta_i^2 = \frac{T^2}{n^2} + 2\frac{T}{n}\alpha_i + \alpha_i^2,$$

следовательно, с учетом предыдущего равенства имеем

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2 = n\frac{T^2}{n^2} + 2\frac{T}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 = \frac{T^2}{n} + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2.$$

Сумма квадратов всегда неотрицательна. Она достигает минимума, равного 0, когда все переменные равны 0, т.е. при $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. Тогда

$$\Delta_i = \frac{T}{n},\ \ i = 1,2,...,n.$$

При этих значениях Δ_i выполнены все ограничения оптимизационной задачи. Итак, утверждение 2 доказано.

Для плана с равными интервалами между поставками все партии товара имеют одинаковый объем. Для такого плана издержки по хранению равны

$$s\int_0^T y(t)dt = \frac{\mu s}{2}\sum_{i=1}^{n(T)}\Delta_i^2 = \frac{\mu s T^2}{2n(T)}.$$

Средние издержки (на единицу времени) таковы:

$$f(T;y) = \frac{1}{T}\left\{gn(T) + \frac{\mu s T^2}{2n(T)}\right\} = g\frac{n(T)}{T} + \mu s\frac{T}{2n(T)}.$$

Итак, минимизация средних издержек – это задача дискретной оптимизации. На третьем этапе построения оптимального плана необходимо найти натуральное число $n(T)$ – самое выгодное число поставок.

Поскольку к моменту T запас товара должен быть израсходован, то общий объем поставок за время T должен совпадать с общим объемом спроса, следовательно, равняться μT. Справедливо балансовое соотношение (аналог закона Ломоносова-Лавуазье сохранения массы при химических реакциях):

$$Qn(T) = \mu T.$$

Из балансового соотношения следует, что

$$\frac{n(T)}{T} = \frac{\mu}{Q}.$$

Средние издержки (на единицу времени) можно выразить как функцию размера партии Q:

$$f(T; y) = g\frac{n(T)}{T} + \mu s\frac{T}{2n(T)} = f_1(Q) = \frac{\mu g}{Q} + \frac{sQ}{2}. \qquad (1)$$

Задача состоит в минимизации $f_1(Q)$ по Q. При этом возможная величина поставки принимает дискретные значения, поскольку

$$Q \in \left\{\frac{\mu T}{n}.\ n = 1,2,...\right\}.$$

Изучим функцию $f_1(Q)$, определенную при $Q > 0$. При приближении к 0 она ведет себя как гипербола, при росте аргумента – как линейная функция. Производная имеет вид

$$\frac{df_1(Q)}{dQ} = -\frac{\mu g}{Q^2} + \frac{s}{2}. \qquad (2)$$

Производная монотонно возрастает, поэтому рассматриваемая функция имеет единственный минимум в точке, в которой производная равна 0, т.е. при

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2\mu g}{s}}. \qquad (3)$$

Получена знаменитая в теории управления запасами "формула квадратного корня".

В литературе иногда без всяких комментариев рекомендуют использовать напряженный план, в котором размеры всех поставляемых партий равны Q_0. К сожалению, получаемый таким путем план почти всегда не является оптимальным, т.е. популярная рекомендация неверна или не вполне корректна. Дело в том, что почти всегда

$$Q_0 \notin \left\{ \frac{\mu T}{n}.\ n = 1,2,... \right\}.$$

Как же найти оптимальный план? Всегда можно указать неотрицательное целое число n такое, что

$$Q_1 = \frac{\mu T}{n+1} < Q_0 \le \frac{\mu T}{n} = Q_2. \qquad (4)$$

Утверждение 3. Решением задачи оптимизации

$$f_1(Q) = \frac{\mu g}{Q} + \frac{sQ}{2} \to \min,$$

$$Q \in \left\{ \frac{\mu T}{n}.\ n = 1,2,... \right\}$$

является либо Q_1, либо Q_2.

Действительно, из всех возможных объемов партии

$$Q \in \left\{ \frac{\mu T}{n}.\ n = 1,2,... \right\}$$

часть лежит правее Q_0, из них наименьшим является Q_2, а часть лежит левее Q_0, из них наибольшим является Q_1. Для построения оптимального плана обратим внимание на то, что производная (2) отрицательна левее Q_0 и положительна правее Q_0, следовательно, функция средних издержек $f_1(Q)$ убывает левее Q_0 и возрастает правее Q_0. Значит, минимум по

$$Q \in \left\{ \frac{\mu T}{n}.\ n = 1,2,... \right\} \cap \{Q : Q \ge Q_0\}$$

достигается при $Q = Q_2$, а минимум по

$$Q \in \left\{ \frac{\mu T}{n}.\ n = 1,2,... \right\} \bigcap \{Q : Q < Q_0\}$$

- при $Q = Q_1$ Последнее утверждение эквивалентно заключению утверждения 3.

Итак, алгоритм построения оптимального плана таков.

1. Найти Q_0 по формуле квадратного корня (3).

2. Найти n из условия (4).

3. Рассчитать $f_1(Q)$ по формуле (1) для $Q = Q_1$ и $Q = Q_2$, где Q_1 и Q_2 определены соотношением (4).

4. Наименьшее из двух чисел $f_1(Q_1)$ и $f_1(Q_2)$ является искомым минимумом, а то из Q_1 и Q_2, на котором достигается минимум – решением задачи оптимизации. Обозначим его Q_{opt}.

Итак, оптимальный план поставки – это напряженный план, в котором объемы всех поставок равны Q_{opt}.

Замечание. Если $f_1(Q_1) = f_1(Q_2)$, то решение задачи оптимизации состоит из двух точек Q_1 и Q_2. В этом частном случае существует два оптимальных плана.

Пример 1. На складе хранится некоторая продукция, пользующаяся равномерным спросом. За 1 день со склада извлекается 5 т продукции. Плата за хранение 1 т. продукции в день – 50 руб. Плата на доставку одной партии – 980 руб. Горизонт планирования – 10 дней. Найти оптимальный план поставок.

В рассматриваемом случае $\mu = 5$ (т/день), $s = 50$ (руб./т$\cdot$день), $g = 980$ (руб./партия), $T = 10$ (дней). По формуле (3) рассчитываем

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2\mu g}{s}} = \sqrt{\frac{2 \times 5 \times 980}{50}} = \sqrt{196} = 14.$$

Множество допустимых значений для Q имеет вид

$$\left\{ \frac{\mu T}{n},\ n = 1,2,... \right\} = \left\{ 50;\ \frac{50}{2};\ \frac{50}{3};\ \frac{50}{4};... \right\} = \{50;\ 25;\ 16,67;\ 12,5;...\}.$$

Следовательно, Q_1 = 12,5 и Q_2 = 16,67. Первое значение определяет напряженный план с четырьмя одинаковыми зубцами, а второе – с тремя. Поскольку

$$f_1(Q) = \frac{5\times 980}{Q} + \frac{50Q}{2} = \frac{4900}{Q} + 25Q,$$

то

$$f_1(Q_1) = f_1(12{,}5) = \frac{4900}{12{,}5} + 25\times 12{,}5 = 392 + 312{,}5 = 704{,}5$$

и

$$f_1(Q_2) = f_1(50/3) = \frac{4900\times 3}{50} + 25\times\frac{50}{3} = 294 + 416{,}67 = 710{,}67.$$

Поскольку $f_1(Q_1) < f_1(Q_2)$, то $Q_{opt} = Q_1$ = 12,5. Итак, оптимальным является напряженный план с четырьмя зубцами.

Как уже отмечалось, часто рекомендуют применять план поставок с Q=Q_0. Каков при этом проигрыш по сравнению с оптимальным планом?

Для плана с Q=Q_0 интервал между поставками составляет Q_0/μ = 14/5 = 2,8 дня. Следовательно, партии придут в моменты t_0 = 0; t_1= 2,8; t_2 = 5,6; t_3 = 8,4. Следующая партия должна была бы придти уже за пределами горизонта планирования T =10, в момент t_4 = 11,2. Таким образом, график уровня запаса на складе в пределах горизонта планирования состоит из трех полных зубцов и одного не полного. К моменту T =10 пройдет 10 – 8,4 = 1,6 дня с момента последней поставки, значит, со склада будет извлечено 5×1,6 = 8 т продукции и останется 14 – 8 = 6 т. План с Q=Q_0 не является напряженным, а потому не является оптимальным для горизонта планирования T =10.

Подсчитаем общие издержки в плане с Q=Q_0. Площадь под графиком уровня запаса на складе равна сумме площадей трех треугольников и трапеции. Площадь треугольника равна (14×2,8)/2 = 19,6, трех треугольников – 58,8. Основания трапеции параллельны оси ординат и равны значениям уровня запаса в моменты времени t_3 = 8,4 и T =10, т.е.

величинам 14 и 6 соответственно. Высота трапеции лежит на оси абсцисс и равна 10 – 8,4 = 1,6, а потому площадь трапеции есть [(14+6)×1,6]/2 = 16. Следовательно, площадь под графиком равна 58,8 + 16 = 74,8, а плата за хранение составляет 50×74,8 = 3740 руб.

За 10 дней доставлены 4 партии товара (в моменты $t_0 = 0$; $t_1 = 2,8$; $t_2 = 5,6$; $t_3 = 8,4$). Следовательно, затраты на доставку равны 4×980 = 3920 руб. Общие издержки за 10 дней составляют 3740 + 3920 = 7660 руб., а средние издержки – 766 руб. Они больше средних издержек в оптимальном плане в 766/704,5 = 1,087 раза, т.е. на 8,7%.

Отметим, что

$$f_1(Q_0) = \frac{4900}{Q_0} + 25Q_0 = \frac{4900}{14} + 25 \times 14 = 350 + 350 = 700,$$

т.е. меньше, чем в оптимальном плане. Таким образом, из-за дискретности множества допустимых значений средние издержки возросли на 4,5 руб., т.е. на 0,64%.

При этом оптимальный размер партии (12,5 т) отличается от $Q_0 = 14$ т на 1,5 т, т.е. $Q_{opt}/Q_0 = 0,89$ – различие на 11%. Достаточно большое различие объемов поставок привело к пренебрежимо малому изменению функции $f_1(Q)$. Это объясняется тем, что в точке Q_0 функция $f_1(Q)$ достигает минимума, а потому ее производная в этой точке равна 0.

Оба слагаемых в $f_1(Q_0)$ равны между собой. Случайно ли это? Покажем, что нет. Действительно,

$$\frac{\mu g}{Q_0} = \frac{\mu g}{\sqrt{\frac{2\mu g}{s}}} = \sqrt{\frac{\mu g s}{2}}; \quad \frac{sQ_0}{2} = \frac{s\sqrt{\frac{2\mu g}{s}}}{2} = \sqrt{\frac{\mu g s}{2}}.$$

Таким образом, составляющие средних издержек, порожденные различными причинами, уравниваются между собой.

Средние издержки в плане с $Q=Q_0$ равны $\sqrt{2\mu g s}$. Интервал между поставками при этом равен

$$\frac{Q_0}{\mu} = \frac{\sqrt{\frac{2\mu g}{s}}}{\mu} = \sqrt{\frac{2g}{\mu s}}.$$

Издержки в течение одного интервала между поставками таковы:

$$\sqrt{2\mu g s} \times \sqrt{\frac{2g}{\mu s}} = 2g,$$

при этом половина (т.е. g) приходится на оплату доставки партии, а половина – на хранение товара.

Итак, план Вильсона хуже оптимального плана. Однако оказывается, что при росте интервала планирования отношение средних издержек в этих двух планах приближается к 1.

4. Асимптотически оптимальный план

Из проведенных рассуждений ясно, что напряженный план с $Q=Q_0$ является оптимальным тогда и только тогда, когда горизонт планирования T приходится на начало очередного зубца, т.е.

$$T = n\frac{Q_0}{\mu} = n\sqrt{\frac{2g}{\mu s}}, \quad n = 1,2,... \qquad (5)$$

Для всех остальных возможных горизонтов планирования T этот план не является оптимальным. Оптимальным будет напряженный план с другим размером поставки. Для дальнейшего весьма существенно, что при изменении горизонта планирования T оптимальный план меняется на всем интервале [0; T].

Как происходит это изменение? При малых T делается лишь одна поставка (при T = 0), график уровня запаса на складе состоит из одного зубца. При увеличении T размер зубца плавно увеличивается. В некоторый момент $T(1)$ происходит переход от одного зубца к двум. В этот момент оптимальны сразу два плана поставки – с одним зубцом и с двумя. При переходе к планам с двумя зубцами размер зубца скачком уменьшается.

При дальнейшем увеличении горизонта планирования оптимальный план описывается графиком с двумя одинаковыми зубцами, размер которых плавно растет. Далее в момент $T(2)$ становится оптимальным план с тремя зубцами, размер которых в этот момент скачком уменьшается (в компенсацию за увеличение числа скачков). И т.д.

Проблема состоит в том, что в реальной экономической ситуации выбор горизонта планирования T весьма субъективен. Возникает вопрос, какой план разумно использовать, если горизонт планирования не известен заранее. Проблема горизонта планирования возникает не только в логистике. Она является общей для любого перспективного планирования, поэтому весьма важна для стратегического менеджмента [19, 21]. Для решения проблемы горизонта планирования необходимо использование конкретной модели принятия решения, в рассматриваемом случае – классической модели управления запасами.

Ответ можно указать, если горизонт планирования является достаточно большим. Оказывается, можно использовать план, в котором все размеры поставок равны Q_0. Для него уровень запаса на складе описывается функцией $y_0(t)$, $0 \leq t < +\infty$, состоящей из зубцов высоты Q_0. *Предлагается пользоваться планом, являющимся сужением этого плана на интервал* $[0; T)$. Другими словами, предлагается на интервале $[0; T)$ использовать начальный отрезок этого плана. Он состоит из некоторого количества треугольных зубцов, а последний участок графика, описываемый трапецией, соответствует тому, что последняя поставка для почти всех горизонтов планирования не будет израсходована до конца. Такой план иногда называют планом Вильсона [19].

Ясно, что этот план не будет оптимальным (для всех T, кроме заданных формулой (5)). Действительно, план Вильсона можно улучшить, уменьшив объем последней поставки. Однако у него есть то полезное качество, что при изменении горизонта планирования его начальный отрезок не меняется. Действительно, планы поставок для горизонтов планирования T_1 и T_2, определенные с помощью функции $y_0(t)$, $0 \leq t < +\infty$, задающей уровень запасов на складе, совпадают на интервале [0; min $\{T_1, T_2\}$).

Определение. Асимптотически оптимальным планом называется план поставок – функция $y:[0;+\infty)\to[0;+\infty)$ такая, что

$$\lim_{T\to\infty}\frac{f(T;y_{opt}(T))}{f(T;y)}=1,$$

где $y_{opt}(T)$ – оптимальный план на интервале [0; T).

В соответствии с определениями и обозначениями, введенными в начале раздела, $f(T;y_{opt}(T)$ - средние издержки за время T для плана $y_{opt}(T)$, определенного на интервале [0; T), а $f(T;y)$ - средние издержки за время T для плана $y:[0;+\infty)\to[0;+\infty)$.

Теорема 1. План $y = y_0$ является асимптотически оптимальным.

Таким образом, для достаточно больших горизонтов планирования T планы $y_0(t)$, $0\leq t<T$, все зубцы у которых имеют высоту Q_0, имеют издержки, приближающиеся к минимальным. Следовательно, эти планы Вильсона, являющиеся сужениями одной и той же функции $y:[0;+\infty)\to[0;+\infty)$ на интервалы [0; T) при различных T, можно использовать одновременно при всех достаточно больших T.

Замечание. Согласно подходу [19] решение проблемы горизонта планирования состоит в использовании асимптотически оптимальных планов, которые близки (по издержкам) к оптимальным планам сразу при всех достаточно больших T.

Доказательство. По определению оптимального плана

$$\frac{f(T;y_{opt}(T))}{f(T;y)}\leq 1. \qquad (6)$$

Найдем нижнюю границу для рассматриваемого отношения. При фиксированном горизонте планирования *T* можно указать неотрицательное целое число *n* такое, что

$$\frac{nQ_0}{\mu} \le T < \frac{(n+1)Q_0}{\mu}.$$

Так как $Tf(T;\, y_{opt}(T))$ и $\frac{nQ_0}{\mu} f\left(\frac{nQ_0}{\mu}; y_{opt}(T)\right)$ - общие издержки на интервалах $[0;\, T)$ и $[0;\, nQ_0/\mu)$ соответственно при использовании оптимального на [0; T) плана, то, очевидно, поскольку второй интервала – часть первого (или совпадает с ним), первые издержки больше вторых, т.е.

$$Tf(T;\, y_{opt}(T)) \ge \frac{nQ_0}{\mu} f\left(\frac{nQ_0}{\mu}; y_{opt}(T)\right).$$

Далее, т.к. на интервале $(0;\, nQ_0/\mu)$, включающем целое число периодов плана y_0, оптимальным является начальный отрезок этого плана $y_0(nQ_0/\mu)$, то

$$\frac{nQ_0}{\mu} f\left(\frac{nQ_0}{\mu}; y_{opt}(T)\right) \ge \frac{nQ_0}{\mu} f\left(\frac{nQ_0}{\mu}; y_0(T)\right).$$

В правой части последнего неравенства стоит $\frac{nQ_0}{\mu}\sqrt{2\mu gs}$ (здесь использована формула для минимального значения средних издержек $f(T;\, y)$ при T, кратном nQ_0/μ). Из проведенных рассуждений вытекает, что

$$Tf(T;\, y_{opt}(T)) \ge \frac{nQ_0}{\mu}\sqrt{2\mu gs}. \qquad (7)$$

Для общих издержек на интервалах $[0;\, T)$ и $[0;\, (n+1)Q_0/\mu)$ при использовании плана y_0, очевидно, справедливо следующее неравенство

$$Tf(T;\, y_0(T)) \le \frac{(n+1)Q_0}{\mu} f\left(\frac{(n+1)Q_0}{\mu}; y_0(T)\right).$$

Следовательно,

$$Tf(T;\, y_0(T)) \le \frac{(n+1)Q_0}{\mu}\sqrt{2\mu gs}\, / \qquad (8)$$

Из неравенств (7) и (8) вытекает, что

$$\frac{f(T; y_{opt}(T))}{f(T; y_0)} \geq \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \geq 1 - \frac{Q_0}{\mu T}.$$

Так как $\frac{Q_0}{\mu T} \to 0$ при $T \to \infty$, то, учитывая неравенство (6), из последнего неравенства выводим справедливость заключения теоремы 1. Таким образом, асимптотическая оптимальность плана y_0 доказана.

При небольшом T средние издержки в плане Вильсона могут существенно превышать средние издержки в оптимальном плане. Превышение вызвано скачками функции $f(T;\ y_0(T))$, связанными с переходами через моменты прихода очередных поставок (и увеличением общих издержек скачком на величину платы за доставку партии). Величину превышения средних издержек в плане Вильсона по сравнению с оптимальными планами можно рассчитать.

Пусть горизонт планирования $T = t_k + \varepsilon$, где t_k – момент прихода (k+1)-й поставки в плане Вильсона, $\varepsilon > 0$. Тогда, как можно доказать,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(T; y_0(T))}{f(T; y_{opt}(T))} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t_k + \varepsilon; y_0(t_k + \varepsilon))}{f(t_k + \varepsilon; y_{opt}(t_k + \varepsilon))} = 1 + \frac{1}{2k}.$$

Таким образом, затраты в плане Вильсона являются минимальными (относительно оптимального плана) при $T = t_k$, $k = 1, 2, \dots$, где t_k – моменты прихода поставок. Напомним, что план Вильсона является оптимальным при указанных значениях T. Однако при T, бесконечно близком к t_k, но превосходящем t_k, затраты увеличиваются по сравнению с затратами в оптимальном плане в $\{1+1/(2k)\}$ раз. При дальнейшем возрастании T отношение издержек (средних или общих) в плане Вильсона к аналогичным издержкам в оптимальном плане постепенно уменьшается, приближаясь к 1 при приближении (снизу) к моменту t_{k+1} прихода следующей поставки. А там – новый скачок, но уже на меньшую величину $\{1+1/(2k+2)\}$. И т.д.

Сразу после прихода первой поставки отношение затрат составляет 1,5 (превышение на 50%), после прихода второй – 1,25 (превышение на

25%), третьей – 1,167 (превышение на 16,7%), четвертой – 1,125 (превышение на 12,5%), пятой – 1,1 (превышение на 10%), и т.д. Таким образом, при небольших горизонтах планирования T превышение затрат может быть значительным, план Вильсона отнюдь не оптимальный. Но чем больше горизонт планирования, тем отклонение меньше. Уже после сотой поставки оно не превышает 0,5%.

5. Влияние отклонений от оптимального объема партии

В реальных производственных и управленческих ситуациях часто приходится принимать решения об использовании объемов партии, отличных от оптимальной величины Q_0, рассчитанной по формуле квадратного корня (3). Например, при ограниченной емкости склада или для обеспечения полной загрузки транспортных средств большой вместимости. Это возможно также в ситуации, когда величина партии измеряется в целых числах (штучный товар) или даже в десятках, дюжинах, упаковках, ящиках, контейнерах и т.д., а величина Q_0 не удовлетворяет этому требованию и, следовательно, не может быть непосредственно использована в качестве объема поставки.

Поэтому необходимо уметь вычислять возрастание средних издержек при использовании напряженного плана с одинаковыми поставками объема Q, отличного от Q_0, по сравнению со средними издержками в оптимальном плане. Будем сравнивать средние издержки за целое число периодов. Как показано выше, они имеют вид

$$f_1(Q) = \frac{\mu g}{Q} + \frac{sQ}{2},$$

где Q- объем партии. Тогда

$$\frac{f_1(Q) - f_1(Q_0)}{f_1(Q_0)} = \frac{1}{2}\left(\frac{Q-Q_0}{Q}\right)\left(\frac{Q-Q_0}{Q_0}\right). \qquad (9)$$

Это тождество нетрудно проверить с помощью простых алгебраических преобразований.

Пример 2. Пусть используется план с Q = 0,9 Q_0. Тогда

$$\frac{f_1(Q)-f_1(Q_0)}{f_1(Q_0)}=\frac{1}{2}\left(\frac{-0{,}1Q_0}{0{,}9Q_0}\right)\left(\frac{-0{,}1Q_0}{Q_0}\right)=\frac{0{,}01}{1{,}8}=0{,}0056.$$

.

Таким образом, изменение объема партии на 10% привело к увеличению средних издержек лишь на 0,56%.

Пример 3. Пусть используемое значение объема поставки Q отличается от оптимального не более чем на 30%. На сколько могут возрасти издержки?

Из формулы (9) вытекает, что максимальное возрастание издержек будет в случае Q = 0,7 Q_0. Тогда

$$\frac{f_1(Q)-f_1(Q_0)}{f_1(Q_0)}=\frac{1}{2}\left(\frac{-0{,}3Q_0}{0{,}7Q_0}\right)\left(\frac{-0{,}3Q_0}{Q_0}\right)=\frac{0{,}09}{1{,}4}=0{,}0643.$$

.

Таким образом, издержки могут возрасти самое большее на 6,43%.

На первый взгляд представляется удивительным, что сравнительно большое отклонение значения переменной Q от оптимального (на 10%) приводит к пренебрежимо малому возрастанию значения оптимизируемой функции. Этот факт имеет большое прикладное значение. Из него следует, что область «почти оптимальных» значений параметра весьма обширна, следовательно, из нее можно выбирать для практического использования те или иные значения, исходя из иных принципов. Можно, например, минимизировать какую-либо иную целевую функцию, тем самым решая задачу многокритериальной оптимизации. Можно «вписаться» в действующую дискретную систему возможных значений параметров. И т.д.

Важное замечание 1. Обширность области «почти оптимальных» значений параметра – общее свойство оптимальных решений, получаемых путем минимизации гладких функций. Действительно, пусть необходимо минимизировать некоторую функцию $g(x)$, трижды дифференцируемую. Пусть минимум достигается в точке x_0. Справедливо разложение Тейлора-Маклорена

$$g(x) = g(x_0) + \frac{dg(x_0)}{dx}(x - x_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2 g(x_0)}{dx^2}(x - x_0)^2 + O((x - x_0)^3).$$

Однако в x_0 выполнено необходимое условие экстремума (в данном случае – минимума)

$$\frac{dg(x_0)}{dx} = 0.$$

Следовательно, с точностью до бесконечно малых более высокого порядка (по сравнению с $(x\text{-}x_0)^2$) справедливо равенство

$$g(x) - g(x_0) = \frac{1}{2}\frac{d^2 g(x_0)}{dx^2}(x - x_0)^2. \qquad (10)$$

Это соотношение показывает, что приращение значений минимизируемой функции – бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с приращением независимой переменной. Если

$$x = x_0 + \varepsilon,$$

то

$$g(x) - g(x_0) = C\varepsilon^2,$$

где

$$C = \frac{1}{2}\frac{d^2 g(x_0)}{dx^2}^{2}.$$

Вернемся к классической модели управления запасами. Для нее надо рассматривать $f_1(Q)$ в роли $g(x)$. С помощью соотношения (10) заключаем, что

$$f_1(Q) - f_1(Q_0) = \frac{1}{2}\frac{d^2 f_1(Q_0)}{dQ^2}(Q - Q_0)^2$$

с точностью до бесконечно малых более высокого порядка. Вычислим вторую производную $f_1(Q)$. Поскольку

$$\frac{df_1(Q)}{dQ} = \frac{d}{dQ}\left(\frac{\mu g}{Q} + \frac{sQ}{2}\right) = -\frac{\mu g}{Q^2} + \frac{s}{2},$$

то

$$\frac{d^2 f_1(Q)}{dQ^2} = \frac{d}{dQ}\left(-\frac{\mu g}{Q^2} + \frac{s}{2}\right) = \frac{2\mu g}{Q^3}.$$

Теперь заметим, что

$$\frac{2\mu g}{Q_0} = \frac{2\mu g}{\sqrt{\frac{2\mu g}{s}}} = \sqrt{2\mu g s} = f_1(Q_0).$$

Следовательно,

$$f_1(Q) - f_1(Q_0) = \frac{1}{2}\frac{f_1(Q_0)}{Q_0^2}(Q - Q_0)^2$$

с точностью до бесконечно малых более высокого порядка. Отличие этой формулы от точной формулы (9) состоит только в том, что Q в знаменателе одной из дробей заменено на Q_0.

6. Устойчивость выводов в математической модели

Вполне ясно, что рассматриваемая классическая модель управления запасами, как и любые иные экономико-математические модели конкретных экономических явлений и процессов, является лишь приближением к реальности. Приближение может быть более точным или менее точным, но никогда не может полностью уловить все черты реальности. Поэтому с целью повышения адекватности получаемых на основе экономико-математической модели выводов целесообразно изучить устойчивость этих выводов по отношению к допустимым отклонениям исходных данных и предпосылок модели [19, 22 - 24]. Выше изучено изменение средних издержек при малых отклонениях величины поставки.

Предположим теперь, что вместо истинных значений параметров μ, g, s нам известны лишь их приближенные значения $\mu^* = \mu + \Delta\mu$, $g^* = g +$

Δg, $s^* = s + \Delta s$. Мы применяем план Вильсона, но с искаженным объемом партии

$$Q^* = Q^*(\mu^*, g^*, s^*) = \sqrt{\frac{2\mu^* g^*}{s^*}}.$$

Это приводит к возрастанию средних издержек. Согласно формулам (9) – (10) возрастание пропорционально $(\Delta Q)^2$ (с точностью до бесконечно малых более высокого порядка). Здесь

$$\Delta Q = Q^*(\mu^*, g^*, s^*) - Q_0(\mu, g, s).$$

Выделим в ΔQ главный линейный член:

$$\Delta Q = \frac{\partial Q}{\partial \mu}\Delta\mu + \frac{\partial Q}{\partial g}\Delta g + \frac{\partial Q}{\partial s}\Delta s = \sqrt{\frac{g}{2\mu s}}\Delta\mu + \sqrt{\frac{\mu}{2gs}}\Delta g - \sqrt{\frac{\mu g}{2s^3}}\Delta s \qquad (11)$$

(с точностью до бесконечно малых более высокого порядка).

Величину Δμ можно определить по фактическим данным о спросе, оценив величину отклонения реального спроса от линейного приближения [19], например, с помощью математического аппарата линейного регрессионного анализа. Для определения значений параметров g и s необходимо проведение специальных достаточно трудоемких исследований. К тому же существуют различные методики расчета этих параметров, результаты расчетов по которым не совпадают. Поэтому естественно оценить разумную точность определения g и s по известной точности определения μ. Для этого воспользуемся «принципом уравнивания погрешностей», предложенным в [19].

Важное замечание 2. Принцип уравнивания погрешностей состоит в том, что погрешности различной природы должны вносить примерно одинаковый вклад в общую погрешность математической модели. Так, определение рационального объема выборки в статистике интервальных данных основано на уравнивании влияния метрологической и статистической погрешностей [25]. Согласно подходу [19] выбор числа градаций в социологических анкетах целесообразно проводить на основе уравнивания погрешностей квантования и неопределенности в ответах респондентов. В классической модели управления запасами целесообразно уравнять влияние неточностей в определении параметров на отклонение целевой функции от оптимума.

Выберем Δg и Δs так, чтобы увеличение затрат, вызванное неточностью определения g и s, было таким же, как и вызванное неточностью определения μ. С точностью до бесконечно малых более высокого порядка это означает, что необходимо уравнять между собой три слагаемых в правой части (11). После сокращения общего множителя получаем, что согласно принципу уравнивания погрешностей должно быть справедливо соотношение

$$\frac{|\Delta\mu|}{\mu} = \frac{|\Delta g|}{g} = \frac{|\Delta s|}{s}. \qquad (12)$$

Таким образом, относительные погрешности определения параметров модели должны совпадать.

В соотношении (12) используются истинные значения параметров, которые неизвестны. Поэтому целесообразно вначале вместо параметров использовать их грубые оценки, из (12) определить их примерную точность, затем провести исследования, уточняющие значения параметров. Эту процедуру естественно повторять до тех пор, пока не произойдет некоторое уравнивание относительных погрешностей определения параметров модели.

7. О практическом применении классической модели управления запасами

Вопросы практического применения классической модели управления запасами рассмотрены в [20, 26]. Для отработки методики практического использования этой модели проведен эксперимент на снабженческо-сбытовой базе, а именно, на Реутовской химбазе

Московской области. Собраны и обработаны данные по одному из товаров, распространяемых этой организацией в большом объеме, - по кальцинированной соде. В качестве исходной информации о спросе использовались данные об ежедневном отпуске кальцинированной соды потребителям, зафиксированные на карточках складского учета. Рассчитана величина затрат на хранение как соответствующая доля общей суммы издержек по содержанию базы, а также расходы на доставку новых партий. Для определения расходов на хранение запасов использованы данные о заработной плате складского персонала (включая основную и дополнительную заработная плата, начисления на зарплату), расходах на содержание охраны, эксплуатацию складских зданий и сооружений, расходах по текущему ремонту, по таре, на приемку, хранение, упаковку и реализацию товаров, о величине амортизационных отчислений и др. Для расчета расходов на доставку новых партий товара использованы данные о расходах по завозу, о плате за пользование вагонами и контейнерами сверх установленных норм, расходах на содержание и эксплуатацию подъемно-транспортных механизмов, о заработной плате работников, занятых в процессе доставки товара, канцелярских, почтовых и телеграфных расходах и др.

Полезным оказалось вытекающее из «принципа уравнивания погрешностей» соотношение (12). Интенсивность спроса μ и погрешность определения этого параметра найдены методом наименьших квадратов. Это дало возможность установить величину относительной точности определения параметров модели, вытекающих из величин погрешностей исходных данных для спроса. Параметры классической модели управления запасами g и s оценивались двумя способами – по методике Всесоюзного института материально-технического снабжения и по методике Центрального экономико-математического института АН СССР. Для каждой из методик с помощью соотношения (12) были определены абсолютные погрешности определения параметров g и s. Оказалось, что для каждой из методик интервалы ($s - \Delta s$, $s + \Delta s$) и ($g - \Delta g$, $g + \Delta g$) таковы, что числа, рассчитанные по альтернативной методике, попадают внутрь этих интервалов. Это означает, что для определения параметров g и s можно пользоваться любой из указанных методик (в пределах точности расчетов, заданной наблюдаемыми колебаниями спроса).

Вызванное отклонениями параметров модели в допустимых пределах максимальное относительное увеличение суммарных затрат на доставку и хранение продукции не превосходило 26% (колебания по кварталам от 22,5% до 25,95%). Фактические издержки почти в 3 раза превышали оптимальные (в зависимости от квартала фактические издержки составляли от 260% до 349% от оптимального уровня). Следовательно, внедрение модели Вильсона в практику управления запасами на Реутовской химбазе дает возможность снизить издержки, связанные с доставкой и хранением кальцинированной соды, не менее чем в 2 раза.

Таким образом, несмотря на то, что параметры модели определены неточно и отклонения значений параметров (от тех значений, по которым рассчитывается оптимальный план поставок) приводят к некоторому увеличению затрат по сравнению с затратами в оптимальном плане, использование рассматриваемой модели для реального управления запасами конкретной продукции может дать значительный экономический эффект. Аналогичным является положение со многими другими моделями управления запасами. Это утверждение подтверждает и зарубежный опыт, проанализированный в монографии [19].

Литература

1. Harris F., Operations and Costs // Factory Management Series. - Chicago: A.W. Shaw Co, 1915. - P. 48-52.

2. Скворонек Ч., Сариуш-Вольский З. Логистика на предприятии. М.: Финансы и статистика, 2004. – 396с.

3. Лайсонс К., Джилингем М. Управление закупочной деятельностью и цепью поставок. – М.: Инфра-М, 2005. – 798 с.

4. Дыбская В.В. Логистика складирования. Учебник. – М.: ИНФРА-М, 2011. - 559 с.

5. Колобов А.А., Омельченко И.Н. Основы промышленной логистики. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1998. – 116 с.

6. Проектирование интегрированных производственно-корпоративных структур: эффективность, организация, управление / Колобов А.А., Омельченко И.Н., Орлов А.И. и др. / Под ред. А.А. Колобова, А.И. Орлова. Научное издание. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. — 728 с.

7. Колобов А. А., Омельченко И. Н., Орлов А. И. Менеджмент высоких технологий. Интегрированные производственно-корпоративные структуры: организация, экономика, управление, проектирование, эффективность, устойчивость. Учебник для вузов. — М.: Экзамен, 2008. — 621 с.

8. Wilson R.H. A scientific routine for stock control // Harvard Business Rev. 1934. V.13. N 1. P.116 - 128.

9. Букан Дж., Кенинсберг Э. Научное управление запасами. - М.: Наука, 1967. - 424 с.

10. Хедли Дж., Уайтин Т. Анализ систем управления запасами. - М.: Наука, 1969. - 510 с.

11. Хэнсменн Ф. Применение математических методов в управлении производством и запасами. - М.: Прогресс, 1966. - 280 с.

12. Булинская Е.В. Стационарное решение в задачах оптимального управления запасами // Теория вероятностей и ее применения. 1964. Т.9. № 3. С.556 - 560.

13. Рыжиков Ю.И. Теория очередей и управление запасами. - СПб.: Питер, 2001. - 384 с.

14. Калинин Н.М., Хоботов Е.Н. Модели управления многопродуктовыми запасами при постоянном спросе // Автоматика и телемеханика. 2008. № 9. С. 156-169.

15. Хоботов Е.Н. Методы решения задач управления многопродуктовыми запасами при случайном спросе // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2011. № 2. С. 62-73.

16. Хоботов Е.Н. Применение кусочно-линейной аппроксимации функций расхода для построения методов управления запасами // Проблемы управления. 2011. № 6. С. 38-46.

17. Хоботов Е.Н. Управление многономенклатурными запасами с учетом производства продукции.// Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия: Машиностроение. 2011. № 2. С. 109-127.

18. Бродецкий Г.Л. Новый формат формулы Харриса-Уилсона: учет временной ценности денег и аренды мест хранения // Логистика сегодня. 2013. № 4. С. 242-251.

19. Орлов А.И. Устойчивость в социально-экономических моделях. - М.: Наука, 1979. - 296 с.

20. Смольников Р.В. Практическое применение математических моделей управления запасами // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2008. Т.74. № 3. С.64-69.

21. Орлов А.И. Менеджмент: организационно-экономическое моделирование. Учебное пособие для вузов. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2009. - 475 с.

22. Орлов А.И. Устойчивые математические методы и модели // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2010. Т.76. №3. С.59-67.

23. Орлов А.И. Устойчивые экономико-математические методы и модели. Saarbrücken (Germany), Lambert Academic Publishing, 2011. 436 с.

24. Орлов А.И. Новый подход к изучению устойчивости выводов в математических моделях / А.И. Орлов // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №06(100). С. 1 – 30. – IDA [article ID]: 1001406001. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2014/06/pdf/01.pdf

25. Орлов А.И., Луценко Е.В. Системная нечеткая интервальная математика. Монография (научное издание). – Краснодар, КубГАУ. 2014. – 600 с.

26. Орлов А.И. Оптимальные методы в экономике и управлении. Учебное пособие. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. — 44 с.

References

1. Harris F., Operations and Costs // Factory Management Series. - Chicago: A.W. Shaw Co, 1915. - R. 48-52.

2. Skovronek Ch., Sariush-Vol'skij Z. Logistika na predprijatii. M.: Finansy i statistika, 2004. – 396s.

3. Lajsons K., Dzhilingem M. Upravlenie zakupochnoj dejatel'nost'ju i cep'ju postavok. – M.: Infra-M, 2005. – 798 s.

4. Dybskaja V.V. Logistika skladirovanija. Uchebnik. – M.: INFRA-M, 2011. - 559 s.

5. Kolobov A.A., Omel'chenko I.N. Osnovy promyshlennoj logistiki. – M.: Izd-vo MGTU im. N.Je.Baumana, 1998. – 116 s.

6. Proektirovanie integrirovannyh proizvodstvenno-korporativnyh struktur: jeffektivnost', organizacija, upravlenie / Kolobov A.A., Omel'chenko I.N., Orlov A.I. i dr. / Pod red. A.A. Kolobova, A.I. Orlova. Nauchnoe izdanie. — M.: Izd-vo MGTU im. N. Je. Baumana, 2006. — 728 s.

7. Kolobov A. A., Omel'chenko I. N., Orlov A. I. Menedzhment vysokih tehnologij. Integrirovannye proizvodstvenno-korporativnye struktury: organizacija, jekonomika, upravlenie, proektirovanie, jeffektivnost', ustojchivost'. Uchebnik dlja vuzov. — M.: Jekzamen, 2008. — 621 s.

8. Wilson R.H. A scientific routine for stock control // Harvard Business Rev. 1934. V.13. N 1. P.116 - 128.

9. Bukan Dzh., Keninsberg Je. Nauchnoe upravlenie zapasami. - M.: Nauka, 1967. - 424 s.

10. Hedli Dzh., Uajtin T. Analiz sistem upravlenija zapasami. - M.: Nauka, 1969. - 510 s.

11. Hjensmenn F. Primenenie matematicheskih metodov v upravlenii proizvodstvom i zapasami. - M.: Progress, 1966. - 280 s.

12. Bulinskaja E.V. Stacionarnoe reshenie v zadachah optimal'nogo upravlenija zapasami // Teorija verojatnostej i ee primenenija. 1964. T.9. № 3. S.556 - 560.

13. Ryzhikov Ju.I. Teorija ocheredej i upravlenie zapasami. - SPb.: Piter, 2001. - 384 s.

14. Kalinin N.M., Hobotov E.N. Modeli upravlenija mnogoproduktovymi zapasami pri postojannom sprose // Avtomatika i telemehanika. 2008. № 9. S. 156-169.

15. Hobotov E.N. Metody reshenija zadach upravlenija mnogoproduktovymi

zapasami pri sluchajnom sprose // Izvestija Rossijskoj akademii nauk. Teorija i sistemy upravlenija. 2011. № 2. S. 62-73.

16. Hobotov E.N. Primenenie kusochno-linejnoj approksimacii funkcij rashoda dlja postroenija metodov upravlenija zapasami // Problemy upravlenija. 2011. № 6. S. 38-46.

17. Hobotov E.N. Upravlenie mnogonomenklaturnymi zapasami s uchetom proizvodstva produkcii.// Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta im. N.Je. Baumana. Serija: Mashinostroenie. 2011. № 2. S. 109-127.

18. Brodeckij G.L. Novyj format formuly Harrisa-Uilsona: uchet vremennoj cennosti deneg i arendy mest hranenija // Logistika segodnja. 2013. № 4. S. 242-251.

19. Orlov A.I. Ustojchivost' v social'no-jekonomicheskih modeljah. - M.: Nauka, 1979. - 296 s.

20. Smol'nikov R.V. Prakticheskoe primenenie matematicheskih modelej upravlenija zapasami // Zavodskaja laboratorija. Diagnostika materialov. 2008. T.74. № 3. S.64-69.

21. Orlov A.I. Menedzhment: organizacionno-jekonomicheskoe modelirovanie. Uchebnoe posobie dlja vuzov. – Rostov-na-Donu: Feniks, 2009. - 475 s.

22. Orlov A.I. Ustojchivye matematicheskie metody i modeli // Zavodskaja laboratorija. Diagnostika materialov. 2010. T.76. №3. S.59-67.

23. Orlov A.I. Ustojchivye jekonomiko-matematicheskie metody i modeli. Saarbrücken (Germany), Lambert Academic Publishing, 2011. 436 s.

24. Orlov A.I. Novyj podhod k izucheniju ustojchivosti vyvodov v matematicheskih modeljah / A.I. Orlov // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №06(100). S. 1 – 30. – IDA [article ID]: 1001406001. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2014/06/pdf/01.pdf

25. Orlov A.I., Lucenko E.V. Sistemnaja nechetkaja interval'naja matematika. Monografija (nauchnoe izdanie). – Krasnodar, KubGAU. 2014. – 600 s.

26. Orlov A.I. Optimal'nye metody v jekonomike i upravlenii. Uchebnoe posobie. — M.: Izd-vo MGTU im. N.Je. Baumana, 2007. — 44 s.